

Un théorème de Helson pour des séries de Walsh

Jean–Pierre Kahane
Laboratoire de Mathématique,
Université Paris–Sud à Orsay

Henry Helson a établi en 1954 le théorème suivant : *Si les sommes partielles d'une série trigonométrique sont positives, les coefficients tendent vers zéro* [1]. C'est une des perles de la théorie des séries trigonométriques, encore mise en valeur par le fait que l'hypothèse n'entraîne pas que la série trigonométrique est une série de Fourier–Lebesgue (Katznelson 1965 [2]).

Nous allons montrer l'analogie des théorèmes de Helson et de Katznelson pour les séries de Walsh, avec un complément au théorème de Katznelson qui s'étend aux séries trigonométriques.

THÉORÈME I.— *Si les sommes partielles d'une série de Walsh sont positives, les coefficients tendent vers zéro.*

THÉORÈME II.— *Soit ψ une application croissante de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ , telle que $\lim_{x \rightarrow 0} (\psi(x)/x^2) = 0$. Alors a) il existe une mesure de probabilité singulière μ sur $[0, 1]$ dont les sommes partielles de la série de Walsh sont positives, et dont les coefficients de Fourier–Walsh, $\hat{\mu}(n)$, vérifient $\sum_0^\infty \psi(|\hat{\mu}(n)|) < \infty$ b) le même énoncé vaut pour les séries et les coefficients de Fourier au sens usuel.*

Précisons les notations pour les séries de Walsh. Au lieu de $[0, 1]$, il est commode de les définir sur le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, que nous désignerons par \mathbb{D} . Les fonctions coordonnées r_1, r_2, \dots sont les fonctions de Rademacher, et elles engendrent par multiplication les fonctions de Walsh w_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) qui sont les caractères de \mathbb{D} . On ordonne ainsi les $w_n = 1$,

$w_1 = r_1, w_2 = r_2, w_3 = r_1 r_2, w_4 = r_3$ etc, c'est-à-dire

$$(1) \quad w_n = \prod r_j^{\alpha_j}, \quad \alpha_j = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } \sum \alpha_j < \infty.$$

Aux entiers n on associe ainsi les suites finies (α_j) de 0 et de 1, et l'ordre croissant des n est l'ordre lexicographique inverse des mots (α_j) .

Une série de Walsh est une série formelle de la forme $\sum_0^\infty c_n w_n$, où les coefficients c_n sont réels ou complexes. Nous nous bornerons aux c_n réels. Les fonctions de Walsh opérant par multiplication sur les séries de Walsh. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME.— *Soit S une série de Walsh et w_m une fonction de Walsh. Ecrivons $w_m S$ sous la forme*

$$w_m S = \sum_0^\infty d_n w_n.$$

Alors, pour chaque k , la somme partielle d'ordre 2^k , $\sum_0^{2^k-1} d_n w_n$, est le produit par w_m d'une différence de sommes partielles de la série S .

Preuve. La série $\sum_0^\infty d_n w_n w_m$ n'est autre que la série S dont on a modifié l'ordre des termes. Reste à montrer que les $w_n w_m$ ($n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$) constituent, à l'ordre près, une suite de 2^k fonctions de Walsh consécutives. Pour cela, écrivons les w_n sous la forme (1) (avec ici $\alpha_j = 0$ ou 1 pour $j \leq k$ et $\alpha_j = 0$ pour $j > k$) et $w_m = \prod r_j^{\beta_j}$ ($\beta_i = 0$ ou 1). Les $w_n w_m$ s'écrivent $\prod r_j^{\gamma_j}$ avec $\gamma_j = 0$ ou 1 et $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j$ modulo 1. Ainsi $(\gamma_j)_{j=1,2,\dots,k}$ parcourt $\{0, 1\}^k$ quand $(\alpha_j)_{j=1,2,\dots,k}$ parcourt $\{0, 1\}^k$, tandis que $(\gamma_j)_{j>k} = (\beta_j)_{j>k}$. Donc les indices des $w_n w_m$, qui s'écrivent $\sum_1^k + \sum_{k+1}^\infty \gamma_j 2^{j-1}$, parcourent un segment des entiers de longueur 2^k , CQFD.

A toute série de Walsh S est associée une martingale dyadique constituée par ses sommes partielles d'ordre 2^k ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$M_k = M_k(S) = \sum_0^{2^k-1} c_n w_n,$$

et on obtient ainsi toutes les martingales dyadiques définies sur \mathbb{D} . Rappelons des propriétés des martingales dyadiques dont nous nous servirons.

P1. S est la série de Fourier–Walsh d’une mesure de Radon réelle sur \mathbb{D} , c’est-à-dire $c_n = \int w_n d\mu$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, si et seulement si les M_k sont bornés dans $L^1(\mathbb{D})$. Dans ce cas, les M_k tendent presque partout sur \mathbb{D} vers la densité de la partie absolument continue de μ , et les M_k tendent vers μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ au sens faible, comme formes linéaires sur $C(\mathbb{D})$.

P2. S est la série de Fourier–Walsh d’une fonction réelle intégrable sur \mathbb{D} , soit $c_n = \int f w_n$, $f \in L^1(\mathbb{D})$, si et seulement si les M_k sont uniformément intégrables. Dans ce cas, les M_k tendent vers f presque partout et dans $L^1(\mathbb{D})$.

P3. S est la série de Fourier–Walsh d’une mesure positive $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ si et seulement si les M_k sont positives, $M_k \geq 0$.

Ici comme dans la suite, positif signifie ≥ 0 .

Preuve du théorème I.

Supposons les sommes partielles de la série S positives, et de plus $c_0 = 1$. Alors S est la série de Fourier–Walsh d’une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{D})$, soit $c_n = \hat{\mu}(n)$, et

$$M_k = M_k(r_1, r_2, \dots, r_k) = \sum_0^{2^k-1} \hat{\mu}(n) w_n.$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + r_{k+1} N_k, \quad N_k = N_k(r_1, r_2, \dots, r_k) \\ N_k &= \sum_0^{2^k-1} \hat{N}_k(m) w_m \\ N_k^* &= \sup_{0 \leq n < 2^k} \left| \sum_0^n \hat{N}_k(m) w_m \right| \end{aligned}$$

L’hypothèse que les sommes partielles de S soient positives se traduit par

$$(2) \quad N_k^* \leq M_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Supposons que les $\hat{\mu}(n)$ ne tendent pas vers 0, c’est-à-dire qu’il existe un $a > 0$, une suite strictement croissante d’entiers k_j , et des entiers $n_j \in [2^{k_j}, 2^{k_j+1}[$ tels que $|\hat{\mu}(n_j)| \geq a$, et tentons d’établir une contradiction.

Supposons d’abord $n_j = 2^{k_j}$. Les N_{k_i} sont bornés dans $L^1(\mathbb{D})$ et $|\hat{N}_{k_j}(0)| \geq a$ puisque $\hat{N}_{k_i}(0) = \hat{\mu}(2^{k_j})$. Quitte à remplacer la suite (k_j) par une sous-suite, nous pouvons supposer que les N_{k_j} convergent faiblement vers une

mesure $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Ainsi

$$\widehat{\nu}(n) = \lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{N}_{k_i}(n)$$

et en particulier $\widehat{\nu}(0) \neq 0$.

Les sommes

$$\nu_k = \sum_0^{2^k-1} \widehat{\nu}(n) w_n \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

forment une martingale dyadique bornée dans $L^1(\mathbb{D})$ (propriété P1) et, pour chaque k ,

$$\nu_k = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_0^{2^k-1} \widehat{N}_{k_i}(n) w_n.$$

L'hypothèse de positivité, sous la forme (2), entraîne

$$(3) \quad \left| \sum_0^{2^k-1} \widehat{N}_{k_i}(n) w_n \right| \leq M_{k_i}$$

lorsque $k_j \geq k$, donc $|\nu_k| \leq M_{k_i}$.

Or les M_{k_i} convergent presque partout vers une $f \in L^1$, la densité de la partie absolument continue de μ (propriété P1). Donc

$$|\nu_k| \leq f.$$

Cela entraîne que les ν_k sont uniformément intégrables, donc convergent dans $L^1(\mathbb{D})$ (propriété P2), donc que ν est absolument continue.

D'autre part, si l'on décompose μ en sa partie absolument continue et sa partie singulière, $\mu = \mu^a + \mu^s$, on peut écrire également $M_k = M_k^a + M_k^s$ et $N_k = N_k^a + N_k^s$. Les M_k^a convergent vers f dans $L^1(\mathbb{D})$, donc les N_k^a tendent vers 0 dans $L^1(\mathbb{D})$, donc ν est la limite faible des $N_{k_j}^s$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout k ,

$$(N_k^s > \varepsilon) \subset (M_k^s > \frac{\varepsilon}{2}) \cup (M_{k+1}^1 > \frac{\varepsilon}{2})$$

et la mesure du second membre tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. Donc ν est singulière. La contradiction est établie dans le cas particulier $n_j = 2^{k_j}$.

Passons au cas général. On considère maintenant les

$$N'_{k_j} = w_{m_j} N_{k_j}, \quad m_j = n_j - 2^{k_j}.$$

Ainsi $\widehat{N}'_{k_j}(0) = \widehat{N}_{k_j}(m_j) = \widehat{\mu}(n_j)$. Comme ci-dessus, quitte à restreindre la suite (n_j) , les N'_{k_j} convergent faiblement vers une mesure ν' singulière, non nulle puisque $\widehat{\nu}'(0) \neq 0$. Pour montrer que ν' est absolument continue, le point crucial est l'analogue de (3) que l'on obtient en appliquant le lemme à N_{k_j} (pour S) et w_{m_j} (pour w_m). On obtient ainsi, pour $k \geq k_j$,

$$(4) \quad \left| \sum_0^{2^k-1} \widehat{N}'_{k_j}(n) w_n \right| \leq 2 M_{k_j},$$

ce qui permet d'achever la démonstration que ν' est absolument continue. La contradiction est ainsi établie dans le cas général, et cela achève la preuve du théorème 1.

Remarque. Cette preuve est calquée sur celle de Helson. Comme ici, Helson met en évidence, sous l'hypothèse que les coefficients ne tendent pas vers zéro, une mesure ν non nulle qui est à la fois singulière et absolument continue. Mais la démonstration de la continuité absolue est différente. Helson utilise un théorème de Frédéric et Marcel Riesz qui appartient à la théorie des fonctions analytiques. On utilise ici la théorie des martingales. L'emploi en parallèle des martingales et des fonctions analytiques est classique en analyse harmonique depuis les théorèmes de Paley et de Littlewood–Paley.

Une autre différence entre les preuves est l'utilisation de l'hypothèse. La positivité des sommes partielles entraîne que les sommes partielles sont bornées dans L^1 , et Helson n'utilise rien d'autre. Au contraire, nous avons utilisé de manière essentielle une autre conséquence de la positivité, la formule (2) (équivalente à la positivité des sommes partielles).

Preuve du théorème II.

Partie a)

On construit la mesure μ comme produit infini

$$\mu = \prod (1 + X_k)$$

où les X_k sont de polynômes de Walsh indépendants à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ et de valeur moyenne nulle : $|X_k| \leq 1$ et $EX_k = 0$. Posons $EX_k^2 = \sigma_k^2$. Lorsque $\sum \sigma_k^2 < \infty$, le produit infini converge dans $L^2(\mathbb{D})$, donc μ est absolument continue. Lorsque $\sum \sigma_k^2 = \infty$, μ est une mesure de probabilité singulière.

Voici une démonstration rapide de ce dernier fait, tirée de [3]. Supposons $\sum \sigma_k^2 = \infty$. Les $\frac{X_k}{\sigma_k}$ forment un système orthonormal dans $L^2(\mathbb{D}, \lambda)$, où λ désigne la mesure de Haar sur \mathbb{D} . On vérifie que les $\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k$ sont de valeur moyenne nulle et deux à deux orthogonales dans $L^2(\mathbb{D}, \mu)$:

$$E_\mu\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right) = E_\lambda\left(\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)(1 + X_k)\right) = 0$$

et, pour $k \neq k'$,

$$\begin{aligned} E_\mu\left(\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)\left(\frac{X_{k'}}{\sigma_{k'}} - \sigma_{k'}\right)\right) &= E_\lambda\left(\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)\left(\frac{X_{k'}}{\sigma_{k'}} - \sigma_{k'}\right)(1 + X_k)(1 + X_{k'})\right) \\ &= E_\lambda\left(\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)(1 + X_k)\right) E_\lambda\left(\left(\frac{X_{k'}}{\sigma_{k'}} - \sigma_{k'}\right)(1 + X_{k'})\right) = 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} E_\mu\left(\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)^2\right) &= E_\lambda\left(\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)^2(1 + X_k)\right) \\ &\leq 2 E_\lambda\left(\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k\right)^2 = 2(1 + \sigma_k^2) \leq 4. \end{aligned}$$

Pour toute suite $(b_k) \in \ell^2$, les séries $\sum b_k \frac{X_k}{\sigma_k}$ et $\sum b_k (\frac{X_k}{\sigma_k} - \sigma_k)$ convergent respectivement dans $L^2(\mathbb{D}, \lambda)$ et dans $L^2(\mathbb{D}, \mu)$. Si μ n'était pas orthogonale à λ , il existerait un point de \mathbb{D} et une suite d'entiers n_i tels que les sommes partielles d'ordre n_i des deux séries convergent en ce point. Par différence, les sommes partielles d'ordre n_i de la série $\sum b_k \sigma_k$ convergeraient. Or on peut choisir les $b_k > 0$, $(b_k) \in \ell^2$, de façon que la série $\sum b_k \sigma_k$ diverge. Donc $\mu \perp \lambda$.

Remarquons que l'hypothèse d'indépendance des X_k peut être remplacée par une condition d'orthogonalité forte, à savoir

$$\int \prod X_k^{\alpha_k} = 0$$

pour toutes les suites (α_k) constituées de 0, 1 et 2, et finies ($\sum \alpha_k < \infty$), contenant au moins un 1 et au plus deux 2. C'est sous cette forme que la méthode a été introduite et utilisée par Peyrière dans l'étude de la singularité mutuelle des produits de Riesz [3].

On imposera donc la condition $\sum \sigma_k^2 = \infty$, et il s'agit maintenant de construire les X_k de façon que les sommes partielles de la série de Fourier-Walsh de μ soient positives, et que les coefficients vérifient la majoration $|\hat{\mu}(n)| \leq \psi(n)$. Pour cela, il est commode de disposer de polynômes de Walsh de la forme suivante :

$$\varphi = \varphi(r_1, r_2, \dots, r_\ell) = \sum_1^{2^\ell} \varepsilon_n w_n, \quad \varepsilon_n = \pm 1$$

pour lesquels

$$\|\varphi\|_v = \sup_{1 \leq p \leq 2^\ell} \left\| \sum_1^p \varepsilon_n w_n \right\|_\infty < C 2^{\ell/2} = C \|\varphi\|_2,$$

C étant une constante absolue. Voici une construction classique de tels polynômes : on pose $P_0 = Q_0 = 1$, $P_{\ell+1} = P_\ell + r_{\ell+1}Q_\ell$, $Q_{\ell+1} = P_\ell - r_{\ell+1}Q_\ell$ ($2 = 0, 1, \dots$), on vérifie que $P_\ell^2 + Q_\ell^2 = 2^{\ell+1}$, d'où

$$\|P_\ell\|_v \leq 2^{\ell/2} + 2^{(\ell-1)/2} + \dots \leq 2^{\ell/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

et on pose $\varphi(r_1, r_2, \dots, r_\ell) = r_1 P_\ell$. C'est la construction donnée dans le cas trigonométrique par Harold Shapiro puis par Walter Rudin, et la suite (ε_r) s'appelle la suite de Rudin–Shapiro.

Etant donné un ensemble d'entiers positifs J , de cardinal 2^ℓ , on désignera par $\varphi((r_j), j \in J)$ le polynôme de Walsh obtenu à partir de $\varphi(r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ en substituant à r_1, r_2, \dots, r_ℓ les r_j , $j \in J$, dans l'ordre croissant des j . La construction de μ va dépendre essentiellement du choix d'une suite très rapidement croissante d'entiers ℓ_k , que nous ferons plus tard. Pour chaque k , soit J_k un ensemble d'entiers, de cardinal 2^{ℓ_k} , situé à droite de J_{k-1} : $\inf J_k > \sup J_{k-1}$. Posons

$$a_k = \frac{1}{2C} 2^{-\ell_k/2}$$

$$X_k = a_k \varphi((r_j), j \in J_k).$$

Explicitons les normes de X_k dans L^2 , dans U (maximum des valeurs absolues des sommes partielles), dans A (somme des valeurs absolues des coefficients) et dans PM (sup des valeurs absolues des coefficients) :

$$\begin{aligned} \|X_k\|_2 &= \frac{1}{2C}, \\ \|X_k\|_U &< \frac{1}{2}, \\ \|X_k\|_A &= \frac{1}{2C} 2^{\ell_k/2}, \\ \|X_k\|_{PM} &= \frac{1}{2C} 2^{-\ell_k/2}. \end{aligned}$$

Comme les J_k sont disjoints, les X_k sont bien indépendants, et on a bien $EX_k = 0$ et $\sum \sigma_k^2 = \infty$.

Posons

$$\Pi_k = (1 + X_1)(1 + X_2) \cdots (1 + X_k).$$

Une somme partielle de la série de Fourier–Walsh de μ dont l'ordre est compris entre $\sup J_j$ et $\sup J_{j+1}$ est la somme de Π_k et d'une somme partielle de $\Pi_k X_{k+1}$, ce que nous écrivons

$$S(\mu) = S(X_{k+1}) = \Pi_k + S..(\Pi_k X_{k+1}).$$

Cette dernière somme partielle se décompose à son tour en

$$S..(\Pi_k X_{k+1}) = \Pi_k S...(X_{k+1}) + S....(\Pi_k) \times \text{un coefficient de } X_{k+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S.(X_{k+1}) &\geq \Pi_k - \Pi_k \|X_{k+1}\|_U - S....(\Pi_k) \|X_{k+1}\|_{PM} \\ &\geq \frac{1}{2} \Pi_k - \frac{1}{2C} 2^{-(\ell_{k+1}/2)} \|\Pi_k\|_A. \end{aligned}$$

Imposons la condition que, pour tout k ,

$$(5) \quad \frac{1}{2C} 2^{-(\ell_{k+1}/2)} \|\Pi_k\|_A \leq \frac{1}{4} \inf \Pi_k.$$

Il en résulte que $S.(X_{k+1}) \geq \frac{1}{4} \Pi_k$, donc $S(\mu) \geq 0$.

Ecrivons $\psi(x) = x^2 \varepsilon(x)$. Alors

$$\sum \varphi(\widehat{\mu}(n)) \leq \sum_k \|\Pi_k X_{k+1}\|_2^2 \varepsilon(\|\Pi_k X_{k+1}\|_{PM}).$$

Or

$$\|\Pi_k X_{k+1}\|_2^2 \leq \frac{1}{4C^2} \|\Pi_k\|_A^2$$

et

$$\varepsilon(\|\Pi_k X_{k+1}\|_{PM}) \leq \varepsilon(\|X_{k+1}\|_{PM}) = \varepsilon\left(\frac{1}{2C} 2^{-(\ell_{k+1}/2)}\right).$$

Si, outre (5), on impose à la suite (ℓ_k) la condition

$$(6) \quad \sum \|\Pi_k\|_A^2 \varepsilon\left(\frac{1}{2C} 2^{-(\ell_{k+1}/2)}\right) < \infty,$$

ce qui est possible, la conclusion du théorème est vérifiée.

La conclusion de la partie a) du théorème est vérifiée.

Partie b)

On choisit ici des polynômes trigonométriques

$$\varphi_\ell(t) = \sum_a^\ell \varepsilon_n \cos nt, \quad \varepsilon_n = \pm 1,$$

avec la propriété de

$$\|\varphi_\ell\|_v \leq C \ell^{1/2} = C \|\varphi_\ell\|_2,$$

et on choisit

$$X_k(t) = a_k \varphi_{\ell_k}(\ell_k t), \quad a_k = \frac{1}{4C} 2^{-\ell_k/2}.$$

Les X_k ne sont plus des fonctions indépendantes, mais, si la suite (ℓ_k) est assez rapidement croissante, elles sont orthogonales au sens fort qui a été décrit ci-dessus. On définit donc

$$\mu = \prod_1^\infty (1 + a_k \varphi_{\ell_k}(\ell_k t))$$

et on vérifie par les mêmes calculs que ci-dessus que μ est singulière, que ses sommes partielles sont positives, et que $\sum \varphi(|\widehat{\mu}(n)|) < \infty$.

C'est exactement la méthode de Katznelson.

Cet article a été écrit en septembre 2004 pour fêter les 50 ans du théorème de Helson et les 70 ans d'Yitzhak Katznelson (14 novembre 2004).

Références

- [1] HELSON, Henry *Proof of a conjecture of Steinhaus*, Proc. Nat. Acad. USA 40 (1954), 205–206.
- [2] KATZNELSON, Yitzhak *Trigonometric series with positive partial sums*, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 718–719.
- [3] PEYRIÈRE, Jacques *Etude de quelques propriétés des produits de Riesz*, Annales de l’Institut Fourier 25, 2 (1975), 127–169.

Jean-Pierre Kahane
Laboratoire de Mathématique
Université Paris-Sud, Bât. 425
91405 Orsay Cedex
Jean-Pierre.Kahane@math.u-psud.fr